Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра ИТАС

Индивидуальная практическая работа №2

«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

Вариант №5

|  |  |
| --- | --- |
| Выполнил: | Проверила: |
| студент гр. 820601  Шведов А.Р | Протченко Е.В. |

|  |  |
| --- | --- |
| Минск 2020 |  |

# Условие задачи

Денежные средства в размере 60 млн ден.ед. распределяются между четырьмя предприятиями (П1, П2, П3, П4). Средства выделяются в размерах, кратных 10 млн ден.ед. Для каждого предприятия известна прибыль, которую оно получит, если ему будет выделена определенная сумма (см. таблицу).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Выделенные средства, млн ден.ед. | Предприятие | | | |
| П1 | П2 | П3 | П4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 8 | 10 | 15 | 12 |
| 20 | 12 | 17 | 17 | 20 |
| 30 | 22 | 20 | 25 | 24 |
| 40 | 27 | 24 | 32 | 27 |
| 50 | 32 | 28 | 35 | 30 |
| 60 | 46 | 35 | 42 | 32 |

* Изучить основные понятия динамического программирования (7.1).
* Согласно варианту задания решить задачу распределения средств между предприятиями. Найти, сколько средств требуется выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль, полученная всеми предприятиями, была максимальной (7.2).

# Ход работы

## 2.1 Обозначения

Выпишем некоторые обозначения:

*Sk* – состояние в конце k-го шага (или, другими словами, состояние в начале k+1-го шага);

*Uk* – любое возможное (допустимое) решение на k-м шаге;

*Uk\**– оптимальное решение на k-м шаге;

*Zk* – критерий эффективности на k-м шаге;

*Ek* – суммарный критерий эффективности на всех шагах, начиная с k-го (т.е. на шагах от k-го до N-го);

*Ek\**– оптимальный (в рассматриваемых примерах – максимальный) суммарный критерий эффективности на всех шагах, начиная с k-го.

В данной задаче в качестве шагов будем рассматривать выделение средств предприятиям: 1 шаг – выделение средств предприятию П1, 2 – П2, и т.д. (**всего 4 шага**). Таким образом, распределение средств между предприятиями можно рассматривать как многошаговую операцию.

## 2.2 Цикл условной оптимизации

### 2.2.1 Шаг 4

Этот шаг подразумевает выделение средств предприятию П4.

Определяем все возможные состояния S3 к началу шага 4, т.е. все возможные значения остатка денежных средств после их выделения предприятиям П1, П2 и П3.

Этот остаток может составлять 0 ден.ед. (если предприятиям П1, П2 и П3 выделяются все средства), 10 млн ден.ед. (если предприятиям П1, П2, П3 выделяется 50 млн ден.ед.), 20 млн ден.ед. (если предприятиям П1, П2, П3 выделяется 40 млн ден.ед.) и так далее.

На этом шаге мы не выяснили, сколько средств требуется выделять предприятию П4, так как неизвестно начальное состояние четвертого шага S3. Поэтому найдены условно оптимальные решения для всех возможных состояний.

**Таблица 1**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| S3 | U4\* | E4\* |
| 0  10  20  30  40  50  60 | 0  10  20  30  40  50  60 | 0  12  20  24  27  30  32 |

### 2.2.2 Шаг 3

Этот шаг подразумевает выделение средств предприятию П4 и П3.

Определяем все возможные состояния S2 к началу шага 3 (или к концу шага 2), т.е. все возможные значения денежных средств, распределяемых между предприятиями П3 и П4.

Для каждого из найденных возможных состояний находим условно оптимальное решение, т.е. решение, оптимальное при условии, что остаток денежных средств равен S2. Важно, чтобы средства для предприятия П3 выделялись таким образом, чтобы обеспечить максимальную суммарную прибыль для П3 и П4.

**Таблица 2**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| S2 | U3 | Z3 | S3 | E4\* | E3 | U3\* | E3\* |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0  10 | 0  15 | 10  0 | 12  0 | 12  15 | 10 | 15 |
| 20 | 0  10  20 | 0  15  17 | 20  10  0 | 20  12  0 | 20  27  17 | 10 | 27 |
| 30 | 0  10  20  30 | 1  15  17  25 | 30  20  10  0 | 24  20  12  0 | 24  35  29  25 | 10 | 35 |
| 40 | 0  10  20  30  40 | 0  15  17  25  32 | 40  30  20  10  0 | 27  24  20  12  0 | 27  39  37  37  32 | 10 | 39 |
| 50 | 0  10  20  30  40  50 | 0  15  17  25  32  35 | 50  40  30  20  10  0 | 30  27  24  20  12  0 | 30  42  41  45  44  35 | 30 | 45 |
| 60 | 0  10  20  30  40  50  60 | 0  15  17  25  32  35  42 | 60  50  40  30  20  10  0 | 32  30  27  24  20  12  0 | 32  45  44  49  52  47  42 | 40 | 52 |

Допустим, что денежные средства, которые распределяются между предприятиями П3 и П4, составляют 10 млн ден.ед. (S2=10). Их можно оставить для предприятия П4 (значит, для предприятия П3 средства не выделяются, U3=0) или выделить их предприятию П3 (U3=10).

Если U3=0, то предприятие П3 не получит прибыли (Z3=0). Тогда в этом случае остаток средств в конце третьего шага составит S3=10 млн ден.ед. Их выделяем для предприятия П4, а прибыль составит E4\*=12 млн ден.ед. Тогда суммарная прибыль предприятий П3 и П4 составит **E3=0+12=12 млн ден.ед.**

Если U3=10, то предприятие П3 получит прибыль Z3=15 млн ден.ед. Остаток средств в конце третьего шага составит S3=0. Предприятию П4 не будет выделено никаких средств, и оно не получит прибыли (E4\* =0). Суммарная прибыль предприятий П3 и П4 составит **E3=15+0=15 млн ден.ед.**

Таким образом, если между предприятиями П3 и П4 распределяется сумма в размере 10 млн ден.ед., то эти средства не следует выделять предприятию П4; их следует выделить предприятию П3, так как общая прибыль в этом случае будет максимальной.

Аналогично распределяем средства и для других случаев соответственно. Результаты распределения средств – Таблица 2.

### 2.2.3 Шаг 2

Этот шаг подразумевает выделение средств предприятию П4, П3 и П2.

Определим все возможные состояния S1 к началу шага 2, т.е. все возможные значения денежных средств, распределяемых между предприятиями П2, П3 и П4. Этот остаток может составлять 0, 10, 20, 30, 40, 50 или 60 млн ден.ед. (в зависимости от того, сколько средств выделяется предприятию П1).

Определим для каждого из возможных состояний S1 условно оптимальное решение, т.е. оптимальную сумму, которая выделяется предприятию П2 при условии, что имеются денежные средства в размере S1. Средства для предприятия П2 мы выделим таким образом, чтобы обеспечить максимальную суммарную прибыль предприятий П2, П3 и П4.

Предположим, что денежные средства, распределяемые между предприятиями П2, П3 и П4, составляют 10 млн ден.ед. (S1=10). Предприятию П2 можно выделить 0 или 10 млн ден.ед. (U2=0 или U2=20).

Если U2=0, то предприятие П2 не получит прибыли (Z2=0). В этом случае остаток средств (состояние) в конце второго шага составит S2=10 млн ден.ед. Эти средства будут распределены между предприятиями П3 и П4. Из таблицы 3 видно, что при оптимальном распределении таких средств между предприятиями П3 и П4 максимальная суммарная прибыль этих предприятий составит E3\*=15 млн ден.ед. Суммарная прибыль предприятий П2, П3 и П4 составит **E2=0+15=15 млн ден.ед.**

Если U2=10, то предприятие П2 получит прибыль Z2=10 млн ден.ед. Остаток средств в конце третьего шага составит S3=0. Предприятиям П3 и П4 не будет выделено никаких средств, и они не получат прибыли (E3\*=0), а суммарная прибыль предприятий П2, П3 и П4 составит **E2=10+0=10 млн ден.ед**.

Таким образом, для состояния S1=10 условно оптимальное решение U2\*=0, условно оптимальный критерий эффективности E2\*=15 млн ден.ед. Это означает, что при распределении средств в размере 10 млн ден.ед. между предприятиями П2, П3 и П4, предприятию П2 не следует выделять средства; все имеющиеся средства следует распределить между предприятиями П3 и П4.

Аналогично распределяем средства и для других случаев соответственно. Результаты распределения средств можно посмотреть в Таблице 3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| S1 | U2 | Z2 | S2 | E3\* | E2 | U2\* | E2\* |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0  10 | 0  15 | 10  0 | 15  0 | 15  10 | 0 | 15 |
| 20 | 0  10  20 | 0  15  17 | 20  10  0 | 27  15  0 | 27  25  17 | 0 | 27 |
| 30 | 0  10  20  30 | 1  15  17  25 | 30  20  10  0 | 35  27  15  0 | 30  37  32  20 | 10 | 37 |
| 40 | 0  10  20  30  40 | 0  15  17  25  32 | 40  30  20  10  0 | 39  35  27  15  0 | 39  45  44  35  24 | 10 | 45 |
| 50 | 0  10  20  30  40  50 | 0  15  17  25  32  35 | 50  40  30  20  10  0 | 45  39  35  27  15  0 | 45  49  52  47  39  28 | 20 | 52 |
| 60 | 0  10  20  30  40  50  60 | 0  15  17  25  32  35  42 | 60  50  40  30  20  10  0 | 52  45  39  35  27  15  0 | 52  55  56  55  51  43  35 | 20 | 56 |

**Таблица 3**

### 2.2.4 Шаг 1

Этот шаг подразумевает выделение средств всем предприятиям.

Определим, сколько средств необходимо выделить предприятию П1,

чтобы обеспечить максимальную суммарную прибыль всех предприятий. Так как начальное состояние на этом шаге известно точно (S0=60), найдем безусловно оптимальное решение.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| S0 | U1 | Z1 | S1 | E2\* | E1 | U1\* | E1\* |
| 60 | 0  10  20  30  40  50  60 | 0  8  12  22  27  32  46 | 60  50  40  30  20  10  0 | 56  52  45  37  27  15  0 | 56  60  57  59  54  47  46 | 10 | 60 |

**Таблица 4**

Предприятию П1 можно выделить 0, 10, 20, 30, 40, 50 или 60 млн ден.ед. (U1=0; 10; 20; 30; 40; 50 или 60). В зависимости от выделенных средств прибыль предприятия П1 (Z1) может составлять 0; 8; 12; 22; 27; 32 или 46 млн ден.ед. Остаток средств в конце первого шага S1 (сумма, выделяемая предприятиям П2, П3 и П4) может составлять 60, 40, 20 или 0 млн ден.ед.

Из таблицы определим максимальную прибыль предприятий П2, П3 и П4 (E2\*) от использования средств в размере S1: она может составлять 56; 52; 45; 37; 27; 15 или 0 млн ден.ед. Для всех случаев определяется суммарная прибыль предприятий П1, П2, П3 и П4 (**E1**): она может составлять 56; 60; 57; 59; 54; 47 или 46 млн ден.ед.

Таким образом, максимальная прибыль предприятий П1, П2, П3 и П4 (т.е. всех предприятий) достигается, если выделить предприятию П1 10 млн ден.ед. (при условии, что для остальных предприятий средства также будут распределяться оптимальным образом). Это означает, что оптимальным решением является выделение предприятию П1 средств в размере 10 млн ден.ед.: U1\*=10. Прибыль всех предприятий в этом случае составит **E1 = 60 млн ден.ед.**

## 2.3 Цикл условной оптимизации

Для первого шага (выделение средств предприятию П1) получили безусловно оптимальное решение: U1\*=10 млн ден.ед.

Для предприятий П2, П3 и П4 остается 50 млн ден.ед. Таким образом, состояние в начале второго шага S1=50. Из таблицы 3 для этого состояния определим оптимальное решение: U2\* =20 (предприятию П2 выделяется 20 млн ден.ед.).

Для предприятий П3 и П4 останется 30 млн ден.ед. (состояние в начале третьего шага S2=30). Из таблицы 3 для этого состояния определим оптимальное решение: U3\* =10.

Для предприятия П4 остается 20 млн ден.ед. (S3=20). Поэтому U4\*=20.

Таким образом, оптимальное решение задачи следующее. Предприятию П1 следует выделить 10 млн ден.ед., предприятию П2 – 20 млн ден.ед., предприятию П3 – 10 млн ден.ед., предприятию П4 – выделить 20 млн ден.ед. Общая прибыль **E** составит **60 млн ден.ед.**, в том числе прибыль предприятия П1 – 8 млн ден.ед., П2 – 52 млн ден.ед., П3 – 35 млн ден.ед., П4 – 20 млн ден.ед.